EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

VIII — 1 MEI 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

NATIONAL ASPECTS OF THE MAA-SA CONTEST IN THE DEVELOPMENT OF TALENT

by

NURA D. TURNER

Associate Professor of Mathematics
State University of New York at Albany

International Congress of Mathematicians
Moscow, USSR, August 18, 1966

This paper is relative to a study I have been conducting for eight years on the academic and professional progress of 117*) students who ranked in the top one percent in the Upstate New York Section of the MAA in the 1958-1960 Contests and a group of students who ranked in the top .03 percent nationally in the 1958 Contest. The title listed implies not only the identification of high ranking students but furthering the counselling, guiding, and encouraging of these mathematically talented students. The work covered by this paper does not include the latter implication; it has to do only with a follow-up study of the group defined but does include the effect a mathematical background has had on the chosen careers of the group, a glance at home backgrounds, and recommendations to the MAA for post-contest study.

Since my paper is relevant to the MAA-SA Contest, as it is generally known, it might be well to define that contest. It is the Annual High School Mathematics Contest sponsored jointly on a national basis in the United States and Canada by the Mathematical Association of America, the Society of Actuaries, and Mu Alpha Theta (1). The Contest is administered on a regional basis with the United States and Canada divided into 10 regions. Regions are subdivided into sections. Any high school or junior high school student is eligible to participate though his school may restrict participation. In the 1965 Contest, an 8th grade student ranked in the top 3% among 4,040 Upstate New York Section participants. While the contest has been in operation since 1950, it has had an official national status beginning only with the 1958 Contest.

*) On 14 of these I have incomplete information with respect to fields of preparation and degrees.

Participation has exploded from 1957 when 1,469 schools and 43,500 students participated to 1966 when 6,800 schools, including army and navy dependents schools, and 275,000 students participated. Unofficially the Contest has been held in Austria, Belgium, England, Germany, Israel, Luxemburg, Switzerland, and The Netherlands.

By any "Western" standards the examination is difficult. It is a multiple choice type of examination composed of 40 questions grouped in three parts. The maximum number of points is 150. Part I contains 20 questions, each counting 3 points, some or all of which are "placebos of the type generally dispensed in the high schools" (2); but Parts II and III, each containing 10 questions, with each of those of Part II counting 4 points and each of those of Part II counting 5 points, are a "fairly strong dose of polyaesque medicine" (3). National norms are based on the scores of the three highest papers in each school. The total of the three highest papers in each school is known as a team score. Grading is on the basis of number of points correct minus one-fourth the number of points wrong. The 1966 National Report showed for individual scores: the range as —7.25 to 127.75; the upper quartile as 44; the median as 31; and the lower quartile as 22. The report showed for team scores: the range as —13.75 to 314; the upper quartile as 107; the median as 77; and the lower quartile as 54.

The questions are "not based on a specific syllabus nor on mere reproduction of classroom work" (4). The examination "seeks to sharpen the concepts and skills associated with plane (euclidean) and simple coordinate geometry, elementary and intermediate algebra, and arithmetic. It assumes familiarity with informal space notions generally learned in elementary and high schools" (5).

Students in the study come from a cross section of typically American families. Among their parents are farmers, ministers of the gospel, machine shop workers, warehouse foremen, secondary school teachers, college professors, administrators, carpenters, and medical doctors; some parents have not had as much as a high school training; some have college degrees. They are products of the opportunity that the USA provides to all. At least one student, who is a promising medical doctor, illustrates this advantage that living in the USA provides. His grandparents came here as immigrants. Two were illiterate. One grandfather had a push cart,

[1]) The twelfth contest has been published in Euclides, **37**, p. 136; results in Euclides, **37**, p. 286; **38**, p. 25, 311. (ed)

later a store; but his father had eleven years of schooling and eventually became a district sales manager and his mother graduated from high school and is a secretary.

The Contest has properly identified these students as talented in mathematics. The majority of the students have received scholarships on both the undergraduate and graduate level. Many have either borrowed money or worked during the summer to supplement scholarship aid. The average grade of college work, when the average has been taken over all subjects, is a B+.

Field of Study	Degree			
	Bachelor	Master	Doctorate	Total
Architecture	2			2
Business Administration	1	5		6
Chemistry			3	3
English		1		1
Engineering	9*	5	5	19
General Science	1			1
History (American)			1	1
Law	3			3
Library Science		1		1
Linguistics	1		1	2
Mathematics	6	6	21	33
Medicine			8	8
Music	1			1
Philosophy			3	3
Physics		1	11	12
Political Science		1		1
Religion	1	1		2
Sociology	1		2	3
Zoology			1	1
Total	26	21	56	103

* one a drop out who has never returned; another who has applied for admission to an engineering school.

The subject matter field attracting the greatest number of students has been mathematics. Related fields have attracted a majority of the students. The chart on the following page shows the frequency of fields to which students have been attracted and the degrees which they have obtained or are seeking. Some students are still in the academic atmosphere working on doctorates, master's degrees and even bachelor's degrees; some are in medical residencies; some are farming; some are teaching on the college

or university level; some are practicing law; some are training for a religious life; some are working on staffs of commercial air plane companies, in defense work related to the Gemini, Saturn, and Apollo projects as well as work related to air force weapons, working for oil companies, for retail credit companies, for accountting firms; some are doing army duty; and some are homemakers.

No one is teaching in the secondary school. Of the five who completed certification requirements for secondary teaching, one feels he might consider the field; two had a taste and quickly left; a fourth is working in a YMCA; and the fifth said, "I always loved mathematics — couldn't say the same for teaching — couldn't stand the placid acceptance of mediocrity among most of my prospective colleagues".

Even one homemaker feels that a mathematical background has had a positive effect on her career. She had done computer programming and had used mathematics considerably since statistical and engineering problems were often thrown her way, but she has said, "The best thing I got out of the computer field was my husband who is a friend of a friend of a former co-worker of mine. Now the closest I come to using mathematics is balancing checkbooks and juggling the schedules of my two teenage stepdaughters".

Throughout the range of the careers into which these students have gone, or plan to go, from architecture to biomedical engineering, to linguistics, to medicine, to teaching at the college level, there is recognition of the helpful effect of mathematics. Some illustrations will suffice.

An architectural student states: "In the technical courses in architecture school (accoustics, structures, heating and air-conditioning) students with strong mathematics background find a functional understanding much easier. Too many structures students give up at the sign of an integral".

A young accountant emphasizes that "many in the accounting profession, public and private, have not yet understood the applicability of mathematical approaches using statistical methods and mathematical models".

An aeronautical engineer who will obtain his doctorate in September feels he is ending up being more of a mathematician. Once he realized that most engineers know "far too little mathematics" and that those in charge of the engineers "know a lot more", most of the courses he took from then on were "disguised mathematics" courses. Now he feels well prepared to solve problems that are presently unsolvable simply because those who have attempted

solutions have not known enough mathematical techniques.

A biomedical engineering student expecting a doctorate in 1967 has been applying mathematics, particularly control system theory, "to the study of physiological systems, i.e. circulatory systems, respiratory systems, etc. so that they may be investigated in a more formal, quantitative way".

One law student explains that mathematics courses have had little direct relationship to his law studies but that the study of mathematics has helped him to develop a crisp analytical approach to legal problems. He states: "My free lance study of symbolic logic (Copi, Quine) has been of direct use in law school; a logical formation of the problem is not a solution, but certainly is a healthy start".

Two other law students, one an attorney in the Tax Division, Department of Justice, the other Legal Counsel, Office of National Planning, Government of Liberia, stress the importance of amathematical background. One feels it has helped develop his powers of analysis and the other that the development of such powers may have contributed to his great succes in law school.

A doctoral candidate in linguistics is glad to have learned what mathematics he did because of its relevance to his field. "First, there is much computation in acoustic phonetics, which studies the duration and frequencies of the sounds of speech. Second, linguistics has the influence of probability and probabilistic thinking, especially in the related area of communication theory. More important, a strain of mathematical thinking runs through all linguistics; the entire field has been described as an effort to mathematize language."

A medical student who is doing his utmost to integrate his mathematical training with medicine has learned computer language on the side. For him it is "fascinating to even think that perhaps someday one may be able to program a computer to read X-rays".

These students have already published scholarly works. A list of known publications follows:

1. Arnold, Earl B., "*An Evaluation of an On-Line Computing System*", Shell Development Technical Report, No. 298—65.
2. Benney, D. J. and Luke, J. C., "*On the Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude*", Journal of Mathematics and Physics, Vol. 43, No. 4, December, 1964, pp. 309—313.
3. Bodner, Howard A., "*Active All-Pass Network*", Electronics Letters, (London), Vol. 1, No. 4, June, 1965.
4. Grayson, G. J. and Kuhns, W. J., "*Hemolytic Factors Affecting the Survival of Transfused Cadaver Blood*", (an abstract),

Transfusion, Vol. 3, No. 5, September-October, 1963, p. 433.
5. Luke, J. C., *"A Perturbation Method for Non-Linear Dispersive Wave Problems"*, Procedures of the Royal Scoeity A, Vol. 292, No. 430, May 31, 1966, pp. 403—413.
6. Zame, Alan, *"A Combinatorial Word Problem"*, The American Mathematical Monthlv, Vol. 70, No. 5, May, 1963, pp. 531—539.

Carl E. Baum has published 4 classified technical reports, 22 papers (one classified) for a restricted distribution list, and has contributed to 2 large summary type documents (classified). All these deal with nuclear weapons effects and instrumentation.

Three articles by Krohn, Mateosian, and Rhodes are to be published:
"Methods of the Algebraic Theory of Machines, I" in the Journal of Computer and Systems Sciences; *"Complexity of Ideals in Finite Semigroups and Finite State Machines"*, in Journal of Mathematical Systems Theory; and *"Lectures on Algebraic Theory of Finite Semigroup and Finite State Machines"*, in Procedures of Conference on Algebraic Theory of Machines, Languages, and Semigroups.
So far what you have heard might have been expected. What I say now you may or not have expected.

Among the students making mathematics and physics their careers, 32 in the doctoral category, there are many who feel the need for guidance particularly from mathematics teachers in high school and undergraduate college work.

One student who will begin an NSF post doctoral fellowship in mathematics this fall states, "If I had not had a certain amount of experience in advance [1]), I think that I might have become confused and discouraged when algebra was first presented to me in the ninth grade. My enjoyable experiences in mathematics have been almost entirely outside the classroom".

Another who is on his last map of a doctorate in theoretical physics reveals, "When I was in elementary and high school, I was unaware of the existence of many important branches of mathematics in which I have since taken courses. I was also unaware of the extent of the importance of mathematics in modern science and engineering."

Still another who will obtain his doctorate in mathematics in January and who completed a four year high school mathematics sequence in two years and scored A grades in exemption examinations his junior year in college states, "At no time, even in special

[1]) gained from reading an algebra book in the library while in the 8th grade.

classes or in mathematics team practice sessions did any teacher indicate what mathematicians do or what mathematics is all about. In my first two years of college, I was not enlightened further. As a junior, my mathematics adviser merely asked which courses I was interested in and signed her approval. Non-science majors, on the other hand, were given an eye-opening introductory course in foundations of modern mathematics. As an upper junior, I registered for an advanced version of this course and finally learned what mathematicians call mathematics. I would say that the school system has wasted about ten years of my mathematical life".

The meaning of what is said by another student, who will receive a doctorate in mathematics in September, is veiled, but still evident. At first he thought in order to study mathematics one would have to become a physicist or an engineer and only later was surprised to discover that one could pursue a career studying pure mathematics.

A student now working toward a doctorate in sociology has this advice: "The need for better pre-college guidance is critical. The student should not rely solely on parents or high school counselors, but should seek out more objective and experienced sources of information". Apparently, the young man has little respect for guidance counselors.

While wanting guidance and encouragement, there is indication that many students studying on the doctoral level resent and resist pressure to study mathematics.

A student working on a doctorate in sociology feels that encouraging any and all students to study mathematics just because it is such a good field represents "a somewhat unjustified academic imperialism". He would rather give students a clear picture of what each field is and can be, providing them with a background that will give them self-confidence, and let them decide what they want to do.

A budding mathematician explains, "Actually, it is probably fortunate that no one in the family circle tried to influence me toward a career in science or mathematics, for I came to dislike much that was actively encouraged".

A student well on his way to becoming a medical doctor implies he objected to pressure when he said, "I received nothing but encouragement everwhere I turned. Too much, I'm afraid".

Others indicate an appreciation of a lack of pressure. A statement will suffice. "My family always encouraged me without, however, forcing me into any particular direction".

In general, students resent pressure. They want to be free to

make the choice of a career, and they want a good introduction to the field of their choice.

About one-fourth of the students studying or working in mathematics or in related fields have lost interest to some extent in mathematics.

Of three on the doctoral level in mathematics, one has found the subject "too dry-emotionless" but the time too late for changing fields. A second, interested in linguistics, is following the advice of one of his professors that one can more easily be a professor of mathematics with a side interest in linguistics than vice versa. A third, studying for a doctorate, who had mathematical talent compared to those around her in high school, is finding, along with other girls in the graduate school where she is studying, that her interest in higher mathematics is limited. She adds, "If I were less far along, I would consider a career in one of the social sciences — anthropology or psychology. I believe my mathematical background would be useful in these fields in terms of a rigor of thought and ability to state what a problem is. The existence of areas such as "mathematical psychology" confirms my belief in the overlap of such areas".

Several continued with mathematics to a bachelor's degree and switched to another field on the graduate level. Pure mathematics was not the "cup of tea" for one student. While continuing to major in mathematics, he took courses stressing practical applications (e.g. numerical analysis, computer simulations). For another, pure mathematics became too abstract for his "less than rigorous personality"; he found "operations research as potentially a more attractive blend of quantitative techniques and practical applications". Both these young men obtained master's degrees in business administration. Another found that when he reached the "more advanced and theoretical courses, such as advanced calculus", he "did not enjoy them nearly as much as earlier courses". He switched to medicine. Still another found that most of advanced mathematics did not interest him as much as working with numbers. He decided to try actuarial work for a year. He has passed Part 8 of the actuarial examinations and must be in the work to stay. Two others switched to library science and political science.

The switch for others came after their contact with calculus or advanced calculus — some, good students on the "A" level in mathematics. One felt that "mathematics was just a "game", having little relevance to everyday life". He switched to English. For another student, mathematics courses at the level of advanced calculus did not hold his interest. "They seemed to be more and

more a matter of theorem proof, theorem proof". He changed his major to physics, studied on the master's level, and then entered the field of computer programming.

Four students are known to have become so disinterested that they became drop outs. Three are making comebacks, however. One is well on his way to a bachelor's degree in accounting while working for an accounting firm; his interest in mathematics waned in his sophomore year but he now realizes its importance in the sophisticated direction in which accounting is turning. A second who left engineering, again in the sophomore year, has been working as an inspector for General Electric, attending night school, and has applied for admission to an engineering college. The third is back studying architecture after a checkered career. The fourth dropped out at the end of his sophomore year and returned to the farm where he is happy.

Improvement in mathematics instruction and counselling could help students to stay with mathematics and from floundering. Attention has been called to the change in interest in mathematics after introduction to calculus courses and to drop outs at about the time or after the time a student is introduced to such courses.

What a student who is working on a doctorate in mathematics says may shed light on the situation. His reference is to a freshman honors course in calculus. "My mother, father, brother, and sister had each done very well in high school and each of them had fallen down when introduced to calculus in college. I was determined that the curtain wasn't going to descend on me as it had on them and fortunately I ran into one of the best teachers I have ever had. . . . He was very youthful and dynamic in the classroom and expected a great deal from his students. I have always felt very fortunate to have had him as a teacher in that course, especially as I have seen so many other students who have done poorly in freshman calculus principally because of lack of interest. The material is not dull at all — it is only that it is often presented in a non-interesting way. And I feel this course is the most important for a prospective student of mathematics; it occurs at the time he is deciding what field to enter".

What another student who is working on a doctorate in philosophy says may shed more light on the situation. His reference is to his freshman calculus course. He reached the point of "hating" mathematics. "A discouraging and unsuccessful bout with the calculus my freshman year helped to direct me away from the scientific and engineering fields. Whether I would have become

interested in liberal arts and especially in philosophy if I had not conceived a dislike for mathematics is questionable. My course in Symbolic and Mathematical Logic (taught by a superb teacher) has just this year[1]) reawakened my appreciation for and delight in mathematical thought. I wish now I had persevered in mathematical studies. My interest in mathematics (and my skill) were in problem solving and manipulation rather than theory which probably had a lot to do with my difficulties with the theoretical mathematics I took in college".

While one could not expect all students who have been identified as mathematically talented to pursue a career in pure mathematics, some of the students covered by this paper seem to have been literally driven out of mathematics. While students do not want to be pressured and indicate resistance to pressure to take mathematics, they also indicate that in the educational system there exists a lack of counselling, guidance, and encouragement to continue with mathematics.

The MAA-SA Contest has so far only identified mathematically talented students. The 1966 report of "The Seventeenth Annual H.S. Mathematics Contest" states the purpose as going no further than seeking to sharpen certain mathematical concepts and skills.

A great amount of money has been spent on this contest. From my experience as contest chairman in the Upstate New York Section, the total cost for administering the examination internationally, including cost of use of building facilities, cost of teacher time in preparing students and proctoring and grading the examination papers, and cost of section chairmen and national committee members time cannot be less than a half million dollars per year. One might consider that the buildings would still exist and the teachers would still be paid if the Contest were not held. But any business, industry, or organization evaluates the cost of a project in terms of employee time and facilities used even though the employees would have been paid and the facilities kept up had the project not been undertaken. The expenditure of such a sum of money each year should result in more than mere identification of talent or sharpening of concepts and skills.

There are certain weaknesses in mathematics education. This paper has identified at least three of them.

1. There is a weakness in the area of introducing students to a general knowledge of what mathematics is about.

---

[1]) First year of graduate work.

2. There is a weakness in mathematics counselling on both the secondary and college levels.
3. There is a weakness in teaching mathematics at the calculus level, both elementary and advanced. Too many mathematics students are turning to other fields at this point. Students have been frank in saying this has been where they have lost interest.

This evaluation of the results of the Annual High School Mathematics Contest involving, primarily, students in one section of the USA but, as well, a group of students on a national basis, points out definitively the need for strengthening the Contest program by using it as more than a tool merely for identification of talent and sharpening of skills. As in all good educational programs, it should be used as a tool to improve the educational process.

As a result of the evaluation contained in this paper, I recommend to the Mathematical Association of America that a committee be appointed for the purpose of finding ways in which the MAA can contribute to advising, guiding and encouraging mathematically talented students identified by the Annual High School Mathematics Contest and to investigate reasons for mathematics drop outs at the calculus level.

The opportunity of using this testing program as an educational tool is important enough to demand study and the thinking of several people.

References

1. Summary of Results and Awards, The Sixteenth Annual H. S. Mathematics Contest, (1965), (1966).
2. C. T. Salkind, Annual High School Mathematics Contest, The Mathematics Teacher, 52 (1964) 77.
3. Ibid.
4. Summary of Results and Awards, The Seventeenth Annual H. S. Mathematics Contest, 1966.
5. Ibid.

BERICHT

Van 21-25 augustus 1967 zal in Utrecht plaats vinden een Internationaal Colloquium over het onderwerp:

"How to teach mathematics as to be useful",

onder auspiciën van de International Commission for Mathematical Instruction (ICMI). Er kan een beperkt aantal Nederlandse waarnemers tot het colloquium worden toegelaten. Belangstellenden kunnen zich richten tot

Prof. dr. H. Freudenthal
Mathematisch Instituut der R.U.
Boothstraat 1c, Utrecht.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXVIII Een vierhoek in een vierhoek.

Het vraagstuk „in een gegeven vierhoek V' een met een gegeven vierhoek V gelijkvormige vierhoek V_1 te construeren" is onlangs in dit tijdschrift[1]) met analytische hulpmiddelen opgelost. Men kan het ook met meetkundige redeneringen behandelen en zich daarbij aansluiten bij een bekende figuur uit de zogenaamde nieuwere meetkunde van de driehoek[2]).

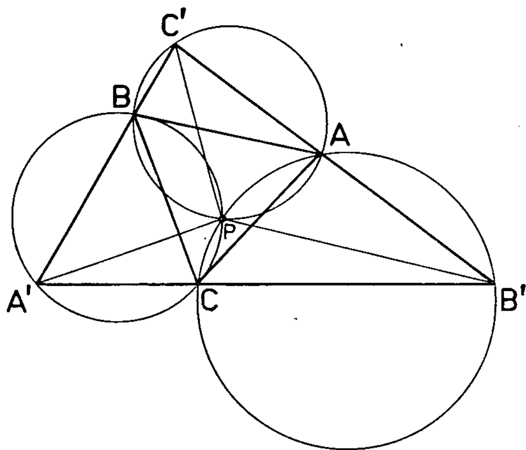


Fig. 1.

Is (fig. 1) ABC een willekeurige in driehoek $A'B'C'$ beschreven driehoek dan gaan, zoals uit een eenvoudige beschouwing van hoeken en bogen volgt, de omgeschreven cirkels van $A'BC$, $B'CA$

[1]) J. T. Groenman, Vierhoeken in en om vierhoeken. *Euclides*, **42** (1967), 144-147.

[2]) Zie b.v. J. Versluys, Inleiding tot de nieuwere meetkunde van de driehoek, (Amsterdam, 1908), 35-40; T. Lalesco, La géométrie du triangle (Paris, 1937), 48-49.

en $C'AB$ door één punt P, dat wij de *pool* van ABC ten opzichte van $A'B'C'$ zullen noemen. Verder blijkt, als P binnen de driehoek ligt,

$$\angle B'PC' = \alpha + \alpha', \ \angle C'PA' = \beta + \beta', \ \angle A'PB' = \gamma + \gamma',$$

terwijl overeenkomstige betrekkingen gelden voor de verschillende standen van P buiten de driehoek. Zijn dus de hoeken van ABC gegeven, dan volgen daaruit de hoeken waaronder men uit P de zijden van $A'B'C'$ ziet en daaruit volgt dan weer het punt P. Of anders gezegd: onderling gelijkvormige in ABC beschreven driehoeken hebben ten opzichte van ABC alle dezelfde pool.

Daar $\angle PBC = \angle PA'C = \angle PA'B'$ en evenzo $\angle PCB = \angle PA'C'$ volgt uit de ligging van P de vorm van de driehoek PBC en dus ook die van PCA en van PAB.

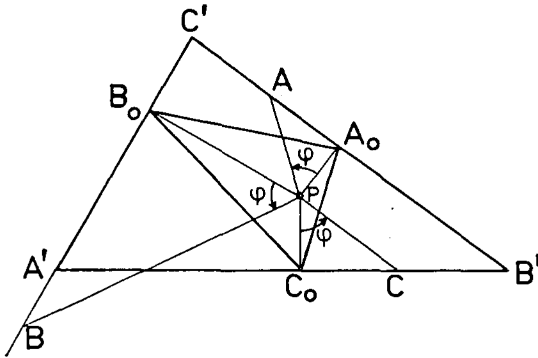


Fig. 2.

Voor alle onderling gelijkvormig ingeschreven driehoeken zijn dus de verhoudingen van PA, PB en PC dezelfde. Elke driehoek uit de verzameling wordt dus uit een willekeurige andere verkregen door een homothetie t.o.v. P, gevolgd door een bepaalde rotatie om P. Tot de collectie behoort de voetpuntsdriehoek $A_0B_0C_0$ van P, die immers P tot pool heeft. Alle ingeschreven driehoeken zijn dus met deze gelijkvormig. Een willekeurige wordt uit $A_0B_0C_0$ verkregen door de transformatie T die het produkt is van een rotatie om P over een hoek φ en een vermenigvuldiging t.o.v. P met de factor $\cos^{-1}\varphi$ (fig. 2). Is D_0 een met $A_0B_0C_0$ verbonden punt dan gaat door T de figuur $A_0B_0C_0D_0$ over in de gelijkvormige figuur $ABCD$ en bij variabele φ doorloopt D een rechte, nl. die door D_0 loodrecht op PD_0.

Wordt een vierhoek $ABCD$ gevraagd, gelijkvormig met $A_1B_1C_1D_1$ en zó dat de hoekpunten resp. liggen op de gegeven rechten l_1, l_2, l_3,

en l_4, dan construere men eerst een driehoek, gelijkvormig met $A_1B_1C_1$ en ingeschreven in de door l_1, l_2 en l_3 gevormde driehoek; D wordt gevonden als snijpunt van l_4 met de rechte die zo juist als een meetkundige plaats voor D is gevonden.

Onze beschouwing houdt verband met de in het einde der vorige eeuw door Burmester, G. Müller e.a. ontwikkelde *aequiforme kinematica*[1]), die de beweging bestudeert van een vlak dat daarbij (niet noodzakelijk congruent blijft met, maar) gelijkvormig met zichzelf verandert. De door T (φ) geïnduceerde beweging is er een waarbij alle baankrommen rechte lijnen zijn.

NOGMAALS VIERHOEKEN IN EN OM VIERHOEKEN

door

Prof. dr. G. R. VELDKAMP

Nuenen

1. Om een vierhoek $PQRS$ te construeren die gelijkvormig is met een gegeven vierhoek $A_0B_0C_0D_0$ (fig. 1) en waarvan de hoekpunten P, Q en S in deze volgorde op drie gegeven lijnen a, b en d liggen, bepaalt Groenman de baan van R als P de lijn a doorloopt[2]). Men kan deze baan zonder enige berekening als volgt vinden. Kies P willekeurig op a en bepaal de beelden b_p en d_p van b en d bij de gelijkvormigheidstransformaties $P(ha_0^{-1}, \alpha_1)$ en $P(hd_0^{-1}, \alpha_2)$; het snijpunt van b_p en d_p is het punt R (fig. 2).

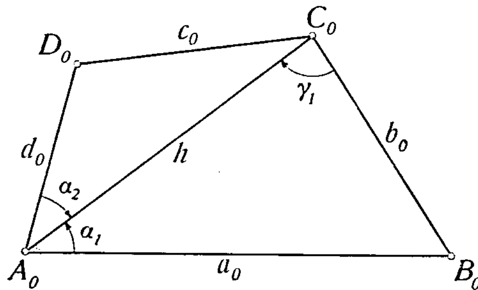


Fig. 1.

[1]) Zie b.v. M. Krause, Analysis der ebenen Bewegung. (Berlin, Leipzig, 1920), 132-216.

[2]) Euclides 42-V blz. 144.

In fig. 2 is b_p gevonden door het beeld K_p van K te bepalen bij de afbeelding $P(ha_0^{-1}, \alpha_1)$ en vervolgens door K_p de lijn b_p te trekken die met b de hoek α_1, (met de juiste zin) insluit. De constructie van d_p is op analoge wijze uigevoerd.

2. Als P de lijn a doorloopt, is nu direct duidelijk dat:

1° K_p en N_p vaste rechten k en n opvolgend door K en N beschrijven;
2° de puntrijen (K_p) en (N_p) perspectief zijn met de puntrij (P), zodat (K_p) en (N_p) dus projectieve puntrijen zijn;
3° b_p en d_p parallelwaaiers doorlopen, die op grond van het onder 2° opgemerkte projectief zijn;

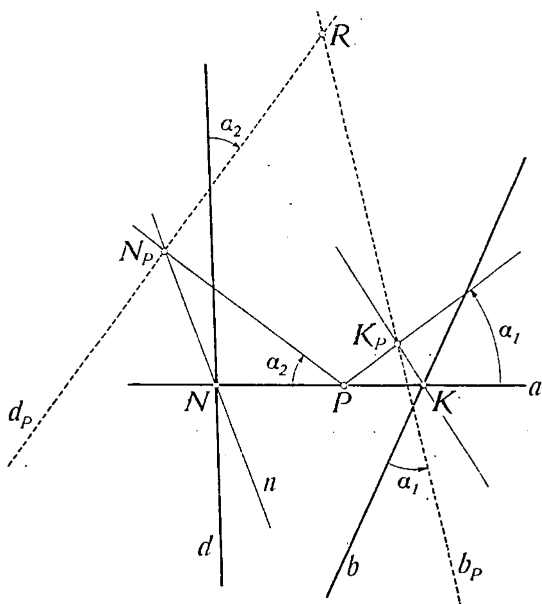


Fig. 2.

4° bij de onder 3° genoemde projectiviteit de verbindingslijn van de dragers van de beide waaiers, dus de oneigenlijke rechte, aan zichzelf is toegevoegd; *de waaiers zijn dus perspectief.*

Hieruit volgt: *als P de lijn a doorloopt, beschrijft R een rechte lijn r.*

3. Het is nu ook niet moeilijk meer, een vierhoek $ABCD$ te construeren gelijkvormig met $A_0B_0C_0D_0$ waarvan de hoekpunten A, B, C en D in deze volgorde op vier gegeven lijnen a, b, c en d liggen.

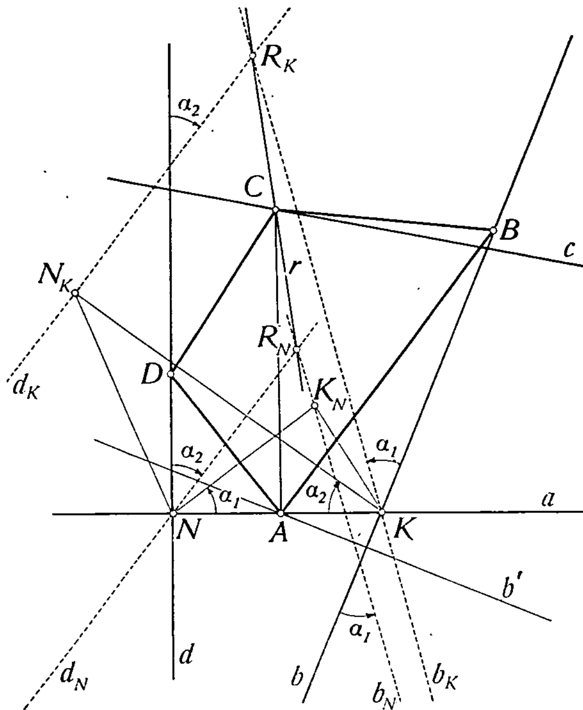


Fig. 3.

Hiertoe construeren we r en wel, door de punten R_K en R_N van deze lijn te bepalen, die verkregen worden door P eerst in K en daarna in N te kiezen (fig. 3). Het snijpunt van c en r is C. Men kan vervolgens A vinden als snijpunt van a met het beeld b' van b bij de transformatie $C\ (hb_0^{-1},\ \gamma_1)$. Hierna kan de gezochte vierhoek eenvoudig worden voltooid.

WISKUNDE OP HET HAVO

Doelstellingen havo.

Het havo stelt zich tot doel de leerlingen algemeen vormend onderwijs te geven en hen voor te bereiden op verdere studie bij het hoger beroepsonderwijs.

Groeiende behoefte.

Het hoger beroepsonderwijs biedt de bezitter van een havo-diploma een groot aantal mogelijkheden tot verdere studie. Op het ogenblik kennen we al het hoger technisch, administratief en economisch onderwijs, de kweekschool, de hogere zeevaartschool, de analistenopleidingen, opleidingen voor onderwijsakten en vele andere scholen.

De verwachting is gerechtvaardigd, dat in de toekomst het hoger beroepsonderwijs zich nog verder gaat uitbreiden. De behoefte aan afgestudeerden aan deze scholen is bijzonder groot.

Doelstellingen wiskunde.

Op grond van de doelstellingen van het havo en de ervaringen met het havo-experiment aan het Pius XII-College te Deurne, zou ik graag enkele opmerkingen willen maken ten aanzien van het vak wiskunde op het havo. Binnen het havo zal de wiskunde, evenals de andere vakken, tot taak hebben bovengenoemde doelstellingen te realiseren. Het zal dus enerzijds een algemeen vormende waarde dienen te hebben en anderzijds aan moeten sluiten bij het hoger beroepsonderwijs

Voor een aantal van deze scholen is een goede wiskundeondergrond vereist of gewenst.

Welke wiskundevakken?

Voorlopig voldoet de traditionele middelbare schoolwiskunde nog aan de eisen die men bij het hoger beroepsonderwijs stelt. Deze scholen zijn immers zelf nog niet bezig aan de modernisering van de wiskunde. Dat deze wiskunde voldoende vormende waarde bezit, behoeft geen nadere toelichting. De traditionele middelbare schoolwiskunde kan dus zonder bezwaar opgenomen worden in het eindexamenprogramma van het havo.

De direkt hier op volgende vraag: welke vakken en op welk niveau?, is tot nu toe te weinig aan de orde gesteld. Hierbij moet men natuurlijk rekening houden met de redelijke verlangens van het hoger beroepsonderwijs.

Eenzijdige aandacht voor de h.t.s.

Bij alle beschouwingen echter over het vak wiskunde op het havo, in verband met het later door de leerlingen te kiezen hoger beroepsonderwijs, wordt de h.t.s. als enige instelling voor hoger beroepsonderwijs gezien.

Op de diverse havo-vergaderingen heeft men voortdurend gedacht en gesproken over een wiskunde-niveau, dat aansluit bij de h.t.s. Andere vormen van hoger beroepsonderwijs, die ook een grote behoefte hebben aan leerlingen met een goede wiskundebasis, werden niet genoemd. Ik denk hierbij aan de kweekschool en het hoger economisch en administratief onderwijs.

Rekening houden met de toekomst.

Toekomstige ontwikkelingen, zoals de veranderingen in het rekenonderwijs op de lagere scholen en de toenemende automatisering, vragen de aandacht. Het is van groot belang zich tijdig daarop voor te bereiden. De behoefte aan wiskundig gevormden is groeiende.

Wiskundeaanleg stimuleren.

In de onderbouw van het havo zal er dus naar gestreefd moeten worden de aanwezige aanleg voor wiskunde te aktiveren om meer leerlingen dan nu er toe te brengen wiskunde te kiezen.

Sprekende cijfers!

De eerste landelijke gegevens wijzen namelijk uit, dat van de leerlingen in 4-havo, die wiskunde gekozen hebben, er zeer weinig van 3-havo afkomstig zijn. Van de 550 leerlingen in 4-havo hebben er 131 wiskunde gekozen. Daarvan zijn er slechts 66 afkomstig uit 3-havo. Van dit aantal was met Kerstmis bijna de helft onvoldoende. Dit resultaat geeft te denken! De instroom van buitenaf is natuurlijk zeer toe te juichen, maar de eigen inbreng zou groter moeten zijn. Deze is nu te gering.

Nadelige beïnvloeding van het experiment.

Het streven naar een eindniveau, dat aansluit op de h.t.s heeft in 2- en 3-havo een wiskunde tot gevolg die sterk tegen de h.b.s. aanleunt en soms zelfs overleunt. Men sla er de nieuwe wiskunde-

boeken voor het havo maar eens op na. Een uitzondering moet hier gemaakt worden voor Moderne Wiskunde I en II, de eerste twee deeltjes van een Nederlandse bewerking van een Schotse wiskundemethode.

De wiskundedocent, die betrokken is bij het havo-experiment, ervaart dan ook, dat het eindniveau voor wiskunde, zoals dit in het ,,blauwe boekje" is vastgelegd, te hoog ligt. Het blauwe boekje biedt een goed houvast, maar werkt ook remmend op de experimenterende wiskundedocent. Wat kan ik met de leerlingen bereiken, stond niet voorop, maar hoe kom ik aan het niveau van het blauwe boekje?

Andere methodieken en vakken kregen en krijgen geen kans beproefd te worden.

Wensen.

Voor 2- en 3-havo zou er een leerplan moeten komen, dat op de eerste plaats een beroep doet op het inzicht van de leerlingen, minder het accent legt op de voor de h.t.s. gewenste technische vaardigheden, meer leerlingen aanspreekt en dan in 4- en 5-havo daarop voortbouwen.

Concept-leerplan voor de onderbouw.

Op een voor alle leerlingen bedoeld leerplan zouden de volgende onderwerpen kunnen staan:
Gebruik van de begrippen verzameling, lege verzameling, deelverzameling, complement, doorsnede en vereniging.
Hoofdbewerking in het reële getallensysteem.
Coördinaten.
Twee vergelijkingen met twee onbekenden.
Oplossen van vierkantsvergelijkingen; discriminant.
De functies $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ met hun grafieken. Diagrammen.
Eenvoudige behandeling van logaritmen; gebruik van de logaritmentafel.
Eenvoudige behandeling van rekenkundige en meetkundige rijen.
Gelijkvormigheid van driehoeken. Stelling van Pythagoras.
Goniometrische verhoudingen.
Cosinusregel.
Oppervlakten.
Cirkel; verband tussen hoeken en bogen.
Omtrek en oppervlakte van de cirkel.
De begrippen definitie, axioma en stelling.
Het omkeren van stellingen.

Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken; hoeken en afstanden.
Kubus, regelmatige piramide, regelmatig driezijdig prisma.
Cilinder, kegel en bol.
Oppervlakte en inhoud van genoemde lichamen.
Toepassingen der algebra en vlakke meetkunde in genoemde lichamen.

Concept-leerplan voor de bovenbouw.

Voortgezette behandeling van de logaritmen.
Lineaire en kwadratische ongelijkheden.
Formules voor sin $(a + b)$, cos $(a + b)$, tg $(a + b)$.
Eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden. Hoeken in radialen.
Voortgezette behandeling van rekenkundige en meetkundige rijen.
Limieten.
Sommeerbare meetkundige rijen.
De funkties $\frac{a}{x}$, $\sqrt{ax + b}$, $a \log x$, $\sin ax$, $\cos ax$, $\operatorname{tg} ax$,
$a \sin x + b \cos x + c$ en hun grafieken.
Beginselen van de differentiaalrekening, afgeleide, van eenvoudige algebraïsche en goniometrische functies, kettingregel, extreme waarden.
Vergelijking van rechte lijn, cirkel en parabool; snijpunten, raaklijnen, hoeken en afstanden.
Lijnenbundels.
Eenvoudige verzamelingen van punten.
De stereometrie kan heel goed uit het eindexamenprogramma verdwijnen en sterk beknot in de onderbouw van het havo behandeld worden.

Keuze eindexamenopgaven.

Op het eindexamen zou men bovendien voor de wiskunde weinig zinvolle opgaven kunnen vermijden. Ik denk hierbij aan enkele examenvoorbeelden uit het blauwe boekje, zoals XI_1, XIV_1, XVI_1, XX_1 en $_2$, XXII_2, XXVI_2 en XXXI_1.

Deze opgaven wijken teveel af van de eindexamenstof en zouden aanleiding kunnen zijn tot een ongewenste uitbreiding van die eindexamenstof of zijn louter rekenvraagstukken.

Een lessentabel van 4-4-4-6-5, lijkt me voldoende om bovenstaand concept-leerplan te realiseren.

Andere oplossing.

Om bij de wiskunde op havo uit de moeilijkheden te geraken is er nog een andere oplossing denkbaar.

Deze komt hierop neer: splits de wiskunde in 4- en 5-havo in wiskunde I en wiskunde II.

Wiskunde I bestaat uit: algebra, beginselen van de differentiaalrekening en statistiek.

Wiskunde II omvat goniometrie en analytische meetkunde. Bij wiskunde II zou men bovendien aandacht kunnen besteden aan toepassingen van de andere wiskundevakken binnen de stereometrie.

Toekomstige h.t.s'ers zouden wiskunde I en II moeten kiezen.

Degenen, die niet naar een h.t.s gaan en toch wiskunde kiezen, hebben voldoende aan wiskunde I.

Het leerplan voor wiskunde I en II kan in grote lijnen gelijk blijven aan boven beschreven concept-leerplan. Statistiek zou ongeveer datgene kunnen omvatten, wat behandeld wordt in het boek „*Statistiek voor het V.H.M.O.*", van Dr. L. Bunt.

De lessentabel: 4-4-4-4+(4)-4+(4).

Doeltreffend.

Het aardige van deze oplossing is, dat meer leerlingen wiskunde kiezen, de h.t.s. er nog beter afkomt en gemakkelijk te verwezenlijken is.

Het proberen waard!

Misschien willen de daarvoor bevoegde commissies deze tweede oplossing in overweging nemen? Nu de scholen nog in de fase van het experiment verkeren, zou op enkele scholen deze oplossing eens beproefd kunnen worden. Met ingang van het nieuwe cursusjaar zou men al kunnen beginnen.

Deurne, 1 februari 1967 J. van Rooy

GEEN GRADEN, MAAR OOK GEEN RADIALEN

door

Drs. J. van DORMOLEN

Oegstgeest

In alle goniometrieboekjes die ik ken worden de goniometrische functies afgeleid uit de goniometrische verhoudingen van hoeken.

Ik heb dat ook steeds gedaan, maar steeds met een onbevredigd gevoel.

Ik had namelijk twee bezwaren. In de eerste plaats wil ik de goniometrische functies zien als functies van de verzameling reële getallen in zichzelf. Om dat te bereiken moest ik eerst het begrip radiaal behandelen en vervolgens me in allerlei bochten wringen om, met behulp van bijvoorbeeld de sinus van x rad, te definiëren de sinus van het reële getal x. In de tweede plaats lukt het me niet om al mijn leerlingen te leren denken in getallen als argument in plaats van graden. Gewoonlijk wordt de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ opgelost op een wijze, die gekarakteriseerd kan worden door: „$\sin x = \frac{1}{2}$, dat is dan 30°. Dat is het twaalfde deel van 360°, dus moet ik het twaalfde deel van 2π hebben. Dat is dan $\frac{1}{6}\pi$ radialen. Maar ik moet het woord radialen weglaten, dus komt er $\frac{1}{6}\pi + k$. 360°, maar ik mag ook geen 360° schrijven, dus komt er $\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$. Maar er is ook nog een andere oplossing, namelijk $180° - 30° = 150°$, maar dat mag ik niet schrijven, dus . . . enz. enz." Natuurlijk lukt het mij wel dergelijke redeneringen niet op een proefwerkblaadje te zien te krijgen, maar dat doet niets af van het feit dat het denkpatroon van vele leerlingen wel zo ligt.

Enige tijd geleden kwam ik in een buitenlands schoolboek een andere manier van behandelen tegen, die deze problemen omzeilt. In het kort komt het neer op het volgende: Ik begin met een doelmatige afbeelding van de verzameling reële getallen op de eenheidscirkel. Daarbij spreken we af dat het beeldpunt van het getal 0 het meest „oostelijke" punt is van de cirkel en dat met opklimmende waarden uit de getalverzameling overeenkomt een draaiing tegen de klok in. Natuurlijk kennen de leerlingen dan al het getal π als verhouding van de halve cirkelomtrek en de straal. Ik kan nu, zonder verwarrende verbanden met hoeken gelegd te hebben al oefeningen laten maken, om deze afbeelding beter te leren kennen. Ik geef

deze afbeelding voor het gemak een letter: C en ik noem hem opwindfunctie omdat ik erbij denk aan het opwinden van de getallenlijn op een schijf met straal 1. Ik vind het geen mooie naam, en zoek nog naar een elegantere. In de oefeningen constateert de leerling dat C periodiek is met periode 2π. Ik kan een punt van de cirkel aanwijzen en vragen naar het volledig C-origineel van dat punt. Als dit er goed inzit trek ik twee loodrechte middellijnen en beschouw deze als de X- en de Y-as van een coördinatenstelsel. Daarbij zorg ik dat het punt $C(O)$ samenvalt met (1,0) en het punt $C(\frac{1}{2}\pi)$ met (0,1). Ik ga dan van een punt van de eenheidscirkel onderzoeken hoe de cartesische coördinaten van dat punt afhangen van een C-origineel van dat punt. Tenslotte noem ik de coördinaten van dat punt respectievelijk cosinus en sinus van elk C-origineel van dat punt. Natuurlijk wordt een en ander samengevat in een tamelijk nette definitie van de functies sin en cos als functies van de verzameling reële getallen in zichzelf.

De leerlingen kunnen nu eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden oplossen zonder verband te leggen met hoeken. Het begrip radiaal behoeven zij niet te kennen. Ik heb trouwens gemerkt dat zij later dit begrip veel sneller kunnen bevatten als zij eerst enige tijd op de hier beschreven wijze gewerkt hebben met de opwindfunctie. Het verband met de goniometrische verhoudingen van hoeken leg ik pas als zij langdurig op deze manier hebben gewerkt. De formule voor $\cos(x - y)$ staat nu centraal bij de afleiding van de bekende formules. De lengte van de koorde met eindpunten $C(x)$ en $C(y)$ is gelijk aan de lengte van de koorde met eindpunten $C(x - y)$ en $C(O)$. Met de bekende formule voor de afstand tussen twee punten in een cartesisch coördinatenstelsel komt hier dan de formule voor $\cos(x - y)$ uit rollen. De leerlingen kennen dan al de eigenschappen zoals $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ en dergelijke en ook $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Met deze formules worden de andere bekende formules afgeleid.

Verder speelt zich alles volgens traditionele banen af.

Voordelen van deze methode zijn: De functies sin en cos worden direct als functies op de verzameling reële getallen gedefinieerd. Onmiddellijk is duidelijk dat het periodieke functies zijn en ik hoef me niet in geestelijke bochten te wringen om met negatieve hoeken, of nog erger met hoeken die groter dan 360° zijn, te werken. Ik vind trouwens het werken met inspringende hoeken al goochelarij. Bij het argument van een goniometrische functie heeft de leerling geleerd aan getallen te denken in plaats van aan hoeken.

In dit verband merk ik nog op dat het onjuist is te spreken van

radialentafel. Waarom niet gewoon de sinus- resp. de cosinustafel? We spreken toch ook van de logaritmentafel.

Over de tangensfunctie heb ik niet gesproken. Die is ook veel ingewikkelder. Ik heb me er tot nu toe een beetje van afgemaakt door te definieren: tg = sin.$\cos^{-1}$ (dit is geen slordige schrijfwijze, maar sluit aan op hetgeen ik bij algebra behandel over het optellen en vermenigvuldigen van functies). Helemaal bevredigend vind ik dit echter niet, omdat ik er graag een plaatje bij zie. Ik probeer dan ook de zaak te leiden naar het bekende plaatje van de raaklijn in $C(0)$ aan de eenheidscirkel.

NASCHRIFT:

Kort nadat ik dit artikel ingezonden had, las ik in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (54e jaargang, blz. 106—110) een artikel waaruit tot mijn genoegen dezelfde opvatting over het behandelen van de goniometrische functies blijkt. Daarin wordt ook een oplossing voor mijn tangensprobleem gegeven. Ik beveel het gaarne ter lezing aan.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Praxis der Mathematik* (VIII, 5–9; mei–september 1966).

A. Langkavel, Überholmanöver;
Fr. Evers, Die Irrationalität von π;
R. Rosenkranz, Vollständige Induktion bei arithmetischen Folgen höherer Ordnung;
Fr. Katscher, Irrwege der Mathematik;
Kl. Wigand, Fördervereinstagung in Braunschweig, 1966;
Kl. Wigand, Albert Gloden†.

W. Zirkel, Zur Dualität der Kreisvierecke;
H. Schäfer, Überlegungen zum Dreikörperproblem;
L. Kienle, Einheiteninvariante Maszzahlengleichungen der Physik;
H. Heineken, Gleichungen vierten Grades und Gruppentheorie;
M. Buth, Kalküle zur Konstruktion von „Schulbuchfunktionen";
Redactie, Mitteilungen über mathematische Filme.

W. Zirkel, Die Ringstruktur der Boole-Algebra;
H. Dücker, Zur Systematik der Vierecke;
K. H. Hürten, Zum Satz von Ptolemäus;
G. Schostack, Periodenkreise;
I. Paasche, 5 Bedeutungen eines Klammersymbols mit vierten Dreiecksstücken;
H. Spiess, Geometrie mit dem Geodreieck;
K. Wigand, Pfingsttagung in Münster.

W. Zirkel, Die Verbandsstruktur der Boole-Algebra im Unterricht;
W. Ness, Bemerkung zu Q 14;
K. Kiesewetter, Heuristische Gesichtspunkte im Mathematikunterricht;
O. Klein, Dreiecks- und Parabelfolgen aus isotropen Winkelhalbierenden;
Th. Ziegler, Mathematische Seminar „Boolesche Maschinen" in der BASF.

H. Heise, Über die Wirksamkeit des Mathematikunterrichts;
H. Ahbe, Der schiefe Wurf in der Atmosphäre;
K. Wuchterl, Der Bedingungsbegriff im mathematischen Unterricht;
H. v. Majewski, Über Durchschnittsmengen;
W. Ness, Ein elementargeometrisches Beispiel für Gleichverteilung.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLV, 253; juli–augustus 1966).

J. Dieudonné, L'algèbre linéaire dans les mathématiques modernes;
G. Choquet, L'analyse dans l'enseignement secondaire;
A. Schmitt, Résultats et perspectives de la recherche spatiale;
M. Glaymann, Fonction caractéristique et ensemble;
G. Kreweras, Réflections sur une fausse évidence, le théorème de Jordan;
H. Gie, Les grandeurs „pseudo";
G.-Th. Guilbaud, A propos de Fermat, existence et non-unicité;
P. Kree, Exposé introductif aux probabilités et aux statistiques;
A. Doneddu, Mesure des rotations;
A. Félix, En mémoire d'Henri Lebesque;
Redactioneel, La réforme en Belgigue;
Matériaux pour un dictionnaire;
Sur la formation des maîtres;
M. Frechet, Une lettre sur l'axiomatique;
A. Chauvin, Sur la définition de l'A.P.M. et sur le but de l'enseignement secondaire;
G. Walusinski, Pour la coopération pédagogique la plus large;
Semah, Sur la notion d'aire.

3. *Mathematica en Paedagogia* (nr. 29; jrg. XI, 1966).

O. Neaufays, La mathématique et l'ingénieur;
E. van Vreckom, Een modelles uit de kombinatieleer;
P. G. J. Vredenduin, Een opzienbarend boek;
G. Noël, Espaces topologiques quotients et plan projectif;
Cl. Vanhelleputte, Een merkwaardige toepassing van een formule uit de leer van de verzamelingen;
U. Bouvier, L'outil mathématique en psychologie;
P. Defrise, Météorologie et mathématique;
W. Servais, Axiomatisation et géométrie élémentaire.

4. *Elemente der Mathematik* (XXI, 3–5, maart 1966–september 1966).

H. Zeitler, Sätze über das Sehnenviereck in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie;
J. Rätz, Explizite Darstellungen der natürlichen Logarithmusfunktion;
R. Z. Dormoaty und H. Florian, Gruppen-ähnliche Strukturen;

K. Szymiczek, Note on Fermat Numbers;
R. B. Cittenden and J. K. Harris, A variation on a problem in number theory of Steinhaus;
I. Paasche, Polarisation and Pseudo-polarisation.

L. J. Mordell, On some ternary quadratic Diophantine equations;
A. Aigner, Kombinatorische Deutung und Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes.

H. Schaal, Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderliche Körper;
J. Rätz, Einige elementare kombinatorische Identitäten mit alternierenden Summen;
I. Paasche, Ein Kreistangentensatz.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XIX, 3–8; juni–oktober 1966).

G. Hermes, Die Zukunft des Menschen und Ciba-Symposion: Man and future;
H. Rieck en H. Zandt, 57. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts; met verslagen van lezingen van Meschkowski, Dieudonné, Papy, Fricke e.a.

H. Blenk, Die Bedeutung der Flugwissenschaften im Bereich der naturwissenschaftlichen und technischen Forschung;
H. Lindner, Erfahrungen mit dem programmierten Lernen;
W. Hänke, Ungleichungen im Algebra-Unterricht der Mittel-Stufe;
G. Schulz, Projektive Geometrie im Unterricht;
W. Pelkmann, Die ungestörte R.

G. Schulz, Projektive Geometrie II;
F. Schulz, Kugelgeometrische Betrachtungen über den Mond und über das Sehen von Geraden im Raum.

G. Papy, Die Geometrie im modernen Mathematikunterricht;
W. Kroll, Zur Einführung komplexer Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen;
K. Haar, Zur Abbildungsgeometrie in der Mittelstufe der Gymnasien: die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen in der euklidischen Geometrie;
W. Ness en W. Pelkmann, Arithmetisches und geometrisches Mittel.

H. Athen, Das Skalarprodukt und die metrische analytische Geometrie.

6. *School Science and Mathematics* (LXVI, 6–9; 583–587; mei–december 1966).

R. C. Bradley and N. W. Earp, The effective teaching of roman numerals in modern mathematics classes;
P. A. Steveson, A geometrical approximation of π;
Ph. F. Kawett, A fresh look at significant digits.

R. F. Graesser, Note on multiple choice tests;
J. C. Biddle, Unit in computer programming in junior high school;
W. H. Carnahan, Iteration.

Cecil B. Read, Do you students know what a mantissa is?
G. S. Hanna, A summary of the literature of geometry prediction with emphasis on methodology and theory;
J. J. Satt, Mathematics enrichment through projects.

H. Hannon, Repeating decimals; fact or fiction;
Fr. Shippert, The use of matrix algebra in the analysis of sociometric data;
Th. P. Fraser, A reasonable approach to a master's degree program for secondary school teachers;
G. T. Bishop, The United Mathlands;
G. H. Miller, Geometry in the secondary schools of Greece;
P. C. Burns and D. J. Dessart, A summary of investigations relating to mathematics in elementary education, 1965;
C. L. Greens, Enumerative forms, carrying and borrowing.

7. *The Mathematical Gazette* (L, 372–373; May–October 1966).

D. E. Mansfield and M. Bruckheimer, Vectors: a special case?
D. S. Macnab, The cubic curve and an associated structure;
R. Wooldridge, Lanchester's ,,potted logs";
J. Hooley, Boole's method for solving Boolean equations;
J. I. Nassai, On multiplication of ordered pairs of real numbers;
A. J. Cole, Cyclic progressive number systems;
E. D. Bender, Logical mappings;
W. T. Blackburn, Recursive treatment of invariance in the system of n coplanar straight lines;
A. F. Hawkins e.a., On certain polyhedra;
H. E. Price, Solution of the Diophantine equation $ax + by = c$;
P. R. Vein, The application of non-unique solutions of one integral equation to the solution of another;
F. Chung, A minimal ellipse in an ionospheric problem.

E. M. Williams, The changing role of mathematics in education;
D. A. Quadling e.a., The use of the axiomatic methods in secondary education; rapport ingediend op het Internationaal Mathematisch Congres te Moskou, 1966;
J. Linfoot, A note on the examining of mathematics at advanced level;
M. Hayman, A survey of motivation in mathematics;
F. Garwood and E. M. Holroyd, The distance of a ,,random chord" of a circle from the centre;
S. N. Collings, Number of arrangements;
D. B. Hunter, Permutations and rearrangements;
D. P. Ambrose, Three ,,eight-point circles" of a cyclic quadrilateral;
P. A. Allinson, Graphical generation of pythegorean triples.

8. *The Mathematics Teacher* (LIX, 5–7; mei–november 1966).

D. A. Johnson, A pattern for research in the mathematics classroom;
E. J. Alberty, Mathematical in general education;
W. E. Briggs, Factorization in integral domains;
B. E. Meserve, The teaching of remedial mathematics;

K. O. May, Programming and automation;
J. L. Ginther and K. B. Henderson, Strategies for teaching concepts by using definitions;
M. E. Schaff, Discovery type investigation for coordinate geometry students;
L. Low, Even more on Pascal's triangle and powers of 11;
G. J. Gillings, The remarkable mental arithmetic of the Egyptian scribes;
H. Athen, The teaching of vectors in the German Gymnasium, II.

B. E. Meserve, Mathematics teachers, on guard!
C. B. Allendorfer, The method of equivalence;
J. J. Bowen, Mathematics and the teaching of science;
S. I. Brown, Multiplication, addition and duality;
E. R. Heineman, Steers, pigs and chickens; a study in semantics;
H. Fremont and N. Ehrenberg, The hidden potential of low achievers;
N. C. Whitman, Program for talented students in mathematics in secondary schools in Hawaii;
C. N. Mills, Radii of the Apollonius contact circles;
H. F. Fehr, The mathematics program in Japanese secondary schools.
F. J. Mueller, The public image of ,,New Mathematics";
A. Tammadge, Networks;
N. C. Whitman and L. Oda, Developing spatial perception via experimental technique;
M. F. Willerding, Divisibility and factorizing of Gaussian integers;
R. G. Brown, The rule of 72;
K. W. Janison, Grammarmathically speaking;
M. L. Keedy, What is a trapezoid?
A. Nannini, Geometric solution of a quadratic equation;
R. Shoemaker, Short sequel to ,,Problem solving in mathematics";
A. S. Saidan, A recreational problem in mediaeval arithmetics;
M. Thomas à Kempis, Mathematics and the Nobel prize;
C. B. Glavas, High school mathematics reform in Greece.

UIT HET EXAMENVERSLAG 1966 VAN HET STAATSEXAMEN H.B.S.-A EN -B

Wiskunde

h.b.s.-A. Nogmaals wordt er op gewezen, dat geëxamineerd wordt volgens het programma dat sinds 1958 geldt voor de eerste drie klassen van de hogereburgerschool. De lineaire en kwadratische functies verdienen meer aandacht; ook het oplossen van eenvoudige ongelijkheden wordt op prijs gesteld. De povere rekentechniek en de onwennigheid bij het bewerken en herleiden van de eenvoudige algebraïsche vormen belemmeren vele kandidaten bij het behandelen van de problemen van de eigenlijke examenstof in de gestelde tijd. Zij zouden meer aandacht moeten schenken aan de meest elementaire wiskunde.

Algebra

h.b.s.-B. De resultaten van het schriftelijk examen worden nog te dikwijls beinvloed door de nonchalante wijze van opschrijven, door onleesbaar schrift en vele doorhalingen.

Mondeling

Er zou kunnen worden verwezen naar de verslagen van de voorgaande jaren, daar steeds weer moet worden geconstateerd, dat vele kandidaten niet voldoende inzicht hebben in de algebraïsche begrippen. Dit veroorzaakt dikwijls verwarring van bijv. begrippen als functie, grafiek, vergelijking en ongelijkheid en onjuiste formulering van de som van een oneindige rij, van het differentiaalquotient en van de afgeleide functie.

De kandidaten gaan dikwijls te veel op een mechanische wijze te werk en veelal is de technische vaardigheid onvoldoende. Er moet wederom op worden gewezen, dat de methode voor het vaststellen van de aard der uiterste waarde(n) van een functie door het kiezen van het teken van de eerste afgeleide, de voorkeur verdient boven de methode van de tweede afgeleide.

Stereometrie

h.b.s.-B. Het schriftelijk gedeelte van het examen geeft geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

Degenen, die aan het mondeling gedeelte van het examen hebben deelgenomen, hadden zich in het algemeen genomen goed voorbereid en hebben dientengevolge het examen niet onbevredigend afgelegd.

De volgende opmerkingen hebben dan ook meer een algemeen karakter.

1. De commissie is van oordeel, dat groot gewicht moet worden toegekend aan het bestuderen van de bijzondere standen, die rechten en vlakken t.o.v. elkaar kunnen hebben.
2. Het op de juiste wijze tekenen van figuren en doorsneden vereist tijdens de studie de grootste aandacht. Uiteraard dient de grondslag voor dit tekenen een goede kennis van de theorie te zijn.
3. Men dient op de hoogte te zijn van de meest voorkomende verzamelingen en de kennis daarvan te kunnen toepassen.

Goniometrie

h.b.s.-B. De klachten, die door de vorige subcommissie in het verslag 1965 zijn geuit, kunnen ook dit jaar door de subcommissie jammer genoeg bijna volledig onderschreven worden. Alleen op het punt „uitdrukken van hoeken en radialen" was er misschien enige verbetering te bespeuren.

Normale uitwerking en bespreking van zelfs ook maar de eenvoudigste problemen, was ook dit jaar bij een aantal kandidaten niet mogelijk, omdat de eerste aanloop door gebrek aan elementaire kennis veel te veel tijd kostte. Het oplossen van bijv. een eenvoudige goniometrische ongelijkheid of het tekenen van de grafiek van een goniometrische functie (tenzij deze de vorm $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ of $f(x) = \operatorname{tg} x$ had) mislukte om deze reden bij een te hoog percentage van de kandidaten, vooral wanneer er in de opgave modulusstrepen voorkwamen.

Analytische meetkunde

h.b.s.-B. Ook voor dit vak is er weinig verbeterd sinds het verslag 1965. Nog steeds blijkt bijv. de hyperbool het stiefkind onder de 2e-graads-krommen te zijn. Ook hier geldt, evenals bij de goniometrie de klacht over de soms zeer lange „aanlooptijd" voor het oplossen van een probleem.

Bij vraagstukken over verzamelingen blijken de kandidaten vaak niet te weten wat ze eigenlijk aan het doen zijn, zelfs al hebben sommigen de „recepten" braaf geleerd. Eliminatie van een parameter bijv. is voor velen een „griezelige" zaak.

Het valt de commissie op, dat zeer veel kandidaten het antwoord schuldig blijven op de vraag naar de aard van de kromme, die door een gegeven 2e graads vergelijking wordt voorgesteld, zelfs als de gegeven vergelijking de middelpuntsvergelijking van de kromme is. Dat een 2e graads vergelijking ook een lijnenpaar kan voorstellen was – hoewel dit toch wel in alle leerboeken, o.a. bij het bepalen van de asymptoten van een hyperbool aan de orde komt – voor alle kandidaten, bij wier examen dit ter sprake kwam, een openbaring.

De verwachting van de commissie, dat een kandidaat de begrippen lijnenbundel en cirkelbundel niet alleen zou kennen, maar ook bij het oplossen van daartoe aanleiding gevende vraagstukken zou kunnen toepassen, bleek bijna altijd te hoog gespannen te zijn.

Voorts meent de commissie, evenals haar voorgangster, dat van de kandidaten geeist mag worden en ook moet worden, dat zij in staat zijn hun bewerkingen en gevonden resultaten in correct en nauwkeurig Nederlands toe te lichten.

Tenslotte is zij van oordeel, dat veel kandidaten het besef missen, dat het niet slechts een kwestie van beleefdheid is er voor te zorgen, dat hun werk duidelijk is geschreven en een verzorgde indruk maakt, maar ook dat nonchalance bij schrijven, rekenen, tekenen en formuleren vaak oorzaak van onnodige fouten is.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

175. Van vijftien munten hebben veertien hetzelfde gewicht en vertoont het gewicht van de vijftiende een lichte afwijking. Men heeft tot zijn beschikking een balans met één schaal en met een wijzer, die het gewicht aangeeft. Bepaal in maximaal vier wegingen het gewicht van de veertien munten, het gewicht van de afwijkende munt en identificeer deze munt. (naar een opgave van B. Kootstra).

176. Opgave. In figuur 1 is P het midden van de koorde RS. Kies A en B willekeurig op de cirkel en trek achtereenvolgens AB, BP, AP en CD. Bewijs, dat nu $PE = PF$. (P. Bronkhorst).

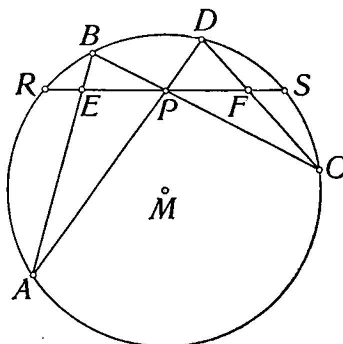


Fig. 1

OPLOSSINGEN

173. Op een torus moeten vier villa's met vier centrales verbonden worden door buizen, die elkaar niet mogen snijden. Is dit mogelijk?

We stellen de torus voor door een rechthoek $ABCD$ (fig. 2), waarvan de punten van de rechthoekszijden AB en DC twee aan twee geïdentificeerd worden (de verbindingslijnen van geïdentificeerde punten zijn evenwijdig aan BC) en de punten op BC en AD analoog. In de onderstaande figuur is de oplossing getekend. Het blijkt mogelijk te zijn.

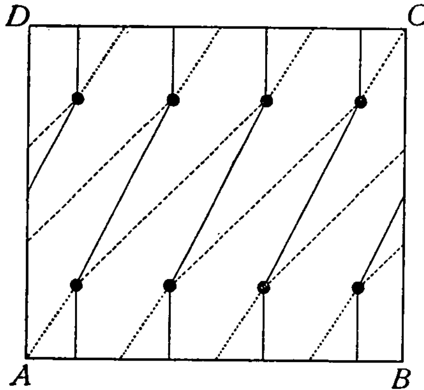


Fig. 2.

BOEKBESPREKINGEN

L. Schmetterer, *Einführung in die mathematische Statistik*, Zweite Auflage, Springer-Verlag, Wien-New York, 1966, IX + 579 blz., $ 19.50.

De eerste druk van dit werk verscheen in 1956. Een bespreking ervan heeft plaatsgehad in Euclides, **32** (1956-57), p. 300. De toenmalige recensent heeft over het werk een zeer gunstig oordeel geveld, waarmee ik mij volledig kan verenigen. Sindsdien is de waarde van het boek alleen nog maar verhoogd, doordat het deel, dat over de statistiek zelf handelt, aanmerkelijk is omgewerkt en uitgebreid.

Hiermee zou ik kunnen volstaan. De lezer, die verschillende besprekingen van inleidingen in de statistiek tegenkomt, zal echter willen weten, hoe hij dit boek moet plaatsen in relatie tot andere inleidingen. Het lijkt mij daarom verstandig erop te wijzen, dat dit boek, in tegenstelling tot de overige besproken inleidingen, begint met een wiskundige inleiding, waarin de maat- en integratietheorie besproken wordt. Bij de waarschijnlijkheidsrekening wordt hiervan gebruik gemaakt en men ziet nu, dat het te gebruiken integraalbegrip inderdaad de lebesgue- en niet de riemannintegraal is. De grondigheid, waarmee de waarschijnlijkheidsrekening behandeld wordt, is dan ook aanmerkelijk groter dan gebruikelijk. Ook de hoofdstukken over statistiek zijn met grote zorgvuldigheid geschreven.

Door dit alles behoort dit boek niet tot de inleidingen, die men gemakkelijk doorleest. Voor eerste kennismaking is het dan ook niet aan te raden, maar degene die een dieper inzicht wenst, zal in dit werk veel van zijn gading vinden.

P. G. J. Vredenduin

Richard A. Dean, *Elements of Abstract Algebra*, John Wiley & Sons Ltd., Londen 1966, 320 blz., 60/—.

Het thema van dit studieboek is „de groep". Het doel de theorie van Galois. Het langste hoofdstuk (50 blz.), dat voorafgegaan wordt door hoofdstuk 0 en een proloog, is hoofdstuk 1, waarin de fundamentele stellingen van de groep worden behandeld op een originele manier. B.v. de rechter nevenklassen van de ondergroep $S \subset G$, worden gevormd door de klassen van de equivalentierelatie:

$$aRb \leftrightarrow ab^{-1} \in S, \quad a \in G, \quad b \in G.$$

Deze klassen hebben een lege doorsnede, terwijl $\cup S_{ai} = G$. Hiermede kan dus eenvoudig de stelling van Lagrange bewezen worden. Zonder enige praktische oefeningen (die telkens volgen) worden dergelijke begrippen niet levend. En alhoewel de schrijver niet de nadruk legt op technische vaardigheid, make men zich geen illusie. Een flinke stapel kladpapier is wel nodig. Zo vergt het wel enig rekenwerk als men de 28 ondergroepen van de symmetrische groep S_4 wil bepalen, met de normaaldelers en de onderling geconjugeerde elementen of ondergroepen, maar die moeite wordt weer beloond als men daar tenslotte de hexaëdergroep herkent.

Zo zijn niet alle opgaven gespeend van rekenwerk! Maar het schenkt toch wel voldoening als men uit de opgaven leert, dat het aantal elementen dat geconjugeerd is niet een element x, gelijk is aan de index van de „normaliser" van x, d.w.z. gelijk aan de index van de ondergroep van alle elementen permutabel met x.

Bij de bewijsvoeringen zou men wensen, dat de auteur een bewijs wat overzichtelijker maakte, door zo nu en dan eens een nieuwe alinea in te lassen. Men krijgt soms het gevoel opgejaagd te worden en kleine onjuistheden sluipen in het betoog (b.v. verwisseling van neutrale elementen in stelling 22).

Na de behandeling van ringen, lichamen en vectorruimten, volgt nog een hoofdstuk over eindige groepen (30 blz.), waarin de stellingen van Sylow behandeld worden.

Hoewel dus geen bijzondere wiskundekennis vooraf geëist wordt, krijgt men bij de bestudering van deze onderwerpen, uitgaande van de groep, wel de juiste indruk, dat algebraïsche structuren niet direct eenvoudig zijn.

Voor liefhebbers een uitstekend boek.

Burgers

M. Euwe, *Inleiding tot computer en automatisering*, N.V. Samsom N.V., Alphen a/d Rijn, 1966, 126 blz.

In zes hoofdstukken: Het nauwkeurig formuleren i.v.m. de overgang van communicatietaal naar machinetaal, de probleemanalyse, schematechnieken, de componenten van de computer, de programmering en de imput-media.

Met enkele eenvoudige voorbeelden, worden deze zaken duidelijk gemaakt. Wiskundige kennis wordt niet vereist.

De bespreking is duidelijk, oefenmateriaal ontbreekt niet, maar een controle m.b.v. een „uitkomsten" tabel ontbreekt.

Voor leerlingbibliotheken aanbevolen.

Burgers